Lösungshinweise zu Übungsblatt 3a

Aufgabe 1

Ein Messobjekt liefert Spannungen U_m im Bereich von 0.5 – 4.0 Volt. Diese Spannungen sollen mit Hilfe eines $20\,\mu A$ -Präzisions-Drehspulmessgerätes der GK1 über $U_m = R \cdot I_m$ gemessen werden. Um die Messunsicherheit klein zu halten, sind die Messbereiche 1 / 2 / 3 / 4 Volt vorgesehen, so dass die Ablesung nach entsprechender Messbereichswahl immer in der oberen Skalenhälfte erfolgen kann.

a) Welchen Wert muss der Vorwiderstand R_1 haben, damit das Drehspulgerät im 1-Volt-Messbereich für die Messspannung $U_m = 1\,V$ gerade Vollausschlag zeigt?

$$R_1 = \frac{1\ V}{20 \cdot 10^{-6}\,{}'\ A} = 50 \cdot 10^3\,\Omega$$

b) Um die Messbereiche einzurichten, werden mit R_1 nun 3 weitere Widerstände $R_{2,}\ R_{3,}\ R_4$ in Reihe geschaltet. Skizzieren Sie die gesamte Schaltung und geben Sie die passenden Widerstandswerte an (**Hilfsfrage:** Wie groß muss der gesamte Vorwiderstand für den 2 V-Bereich sein, damit maximal $20\,\mu A$ fliessen, usw.)

$$R_2 = R_3 = R_4 = 50 \cdot 10^3\,\Omega$$

c) Wie groß ist die maximale absolute Messunsicherheit ΔU_m bei $U_m = 0.5V$ und $U_m = 3.0V$, wenn Präzisionswiderstände mit 1% Toleranz verwendet werden? Allgemein gilt hier

$$\Delta U_m = \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_3} \cdot \Delta R_3\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_4} \cdot \Delta R_4\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial I_m} \cdot \Delta I_m\right|$$

Die partiellen Ableitungen nach den Widerständen ergeben jeweils den gleichen Zahlenwert I_m , die absoluten Messunsicherheiten der Widerstände sind ebenfalls gleich,

$$\Delta R = 0.5 \cdot 10^3\ \Omega \quad .$$

Bei $U_m = 0.5\ V$ fliesst $I_m = 10 \cdot 10^{-6}\,\mu A$ Strom , nur R_1 ist im Eingriff,

$$\Delta U_m = \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial I_m} \cdot \Delta I_m\right|$$

$$\Delta U_m = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5 \cdot 10^3 + 50 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 10^{-5} = 0.015\ V$$

Bei $U_m = 3\ V$ sind $R_{1,}\ R_{2,}\ R_3$ im Eingriff:

$$\Delta U_m = \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial R_3} \cdot \Delta R_3\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial I_m} \cdot \Delta I_m\right|$$

$$\Delta U_m = 3 \cdot \left|I_m \cdot \Delta R_1\right| + \left|\frac{\partial U_m}{\partial I_m} \cdot \Delta I_m\right|$$

$$\Delta U_m = 3 * 20 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-3} + 150 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}$$

$$= 0.06\ mV$$

Aufgabe 2

Im nebenstehenden Diagramm rechts unten ist die periodische Spannung

$$u(t)=u(T\pm k\cdot T),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ ...$$

skizziert.

a) Geben Sie die Funktion $u(t)$ im Intervall $0\leq t\leq T/2$ an.

$$u(t)=\hat{U}\cdot\frac{1}{\frac{T}{2}}\cdot t=\frac{2}{T}\cdot t \text{ Volt}$$

b) Mittelwert $\overline{U}$ von $u(t)$?

$$\overline{U}=\frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_0^{T/2} u(t)dt=\frac{\hat{U}}{2}=0.5 \text{ Volt}$$

c) Effektivwert U_{eff} von $u(t)$?

Es empfiehlt sich, zunächst U^2_{eff} zu berechnen, um das dauernde Schreiben der Wurzel zu vermeiden:

$$U^2_{eff}=\frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_0^{T/2} u(t)^2 dt=\frac{1}{3}\text{ Volt}^2$$

$$U_{eff}=1/\sqrt{(3)}=0.5774 \text{ V}$$

d) Wie groß ist die Grundfrequenz f_g für $T=0.02s$?

$$f_g=\frac{1}{T}=50 \text{ Hz}$$

e) Zeigen Sie, dass die Amplitude $\hat{u}_g$ von f_g $\hat{u}_g=-4\cdot U_0/\pi^2$ ist.

Wegen der geraden Funktion u(t) sind alle sin-Komponenten Null (sin ist ungerade) und es bleiben nur cos-Komponenten. Die erste davon ist:

$$\hat{u}_g=a_1=\frac{2}{T}\cdot 2\cdot\int_0^{T/2} u(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) dt$$

$$\hat{u}_g=-\frac{4}{\pi^2}=-0.4053 \text{ V}$$

f) Welchen Effektivwert $U_{eff,D}$ zeigt ein Dreheiseninstrument an, dessen Grenzfrequenz 80 Hz beträgt?

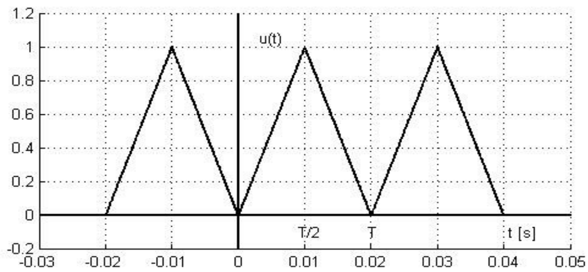
$$U_{eff,D}=\sqrt{\overline{U}^2+\left(\frac{\hat{u}_g}{\sqrt{(2)}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{0.4053}{\sqrt{(2)}}\right)^2}=0.5763 \text{ V}$$

g) Welcher systematische Fehler entsteht bei Messung des Effektivwertes gemäß

Punkt f)?

$$\Delta Ueff=U_{eff}-U_{eff,d}=0.011 \text{ V}$$



Hinweis: Wegen der Symmetrie zur vertikalen Achse gibt es nur Frequenz-Komponenten mit cos-Anteilen. Für die Rechnung zu Punkt e) brauchen Sie nur die unter a) ermittelte Funktion für das Intervall $0\leq t\leq T/2$, wenn Sie die Symmetrien beachten!

Aufgabe 3

Bei einem LRC-Reihenschwingkreis mit $C=10^{-6}/(2\pi)^2$ Farad , $R=0.1\,\mathrm{Ohm}$ soll die unbekannte Induktivität L gemessen werden. Dazu wird der Schwingkreis an einen sehr niederohmigen Sinusgenerator (Spannung $u(t)$) angeschlossen und diejenige Frequenz f_{res} eingestellt, bei der die Kondensatorspannung $u_C(t)$ ihre Maximal-Amplitude erreicht (Resonanzfrequenz).

a) Bestimmen Sie f_{res} bei Annahme von $R \to 0$ (**Hinweis:** $|\underline{U}_C/\underline{U}|$ bilden)

$$|\underline{U}_C/\underline{U}| = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC + (1-\omega^2 LC)} \xrightarrow{R\to 0} \frac{1}{1-\omega^2 LC}$$

Strom maximal bei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,\mathrm{Hz}$

b) Die Messung der Kondensatorspannung mit einem Oszilloskop ergab, dass die gesuchte Maximal-Amplitude bei $f_{res} = 10^6\,\mathrm{Hz}$ erscheint. Welchen Wert hat L?

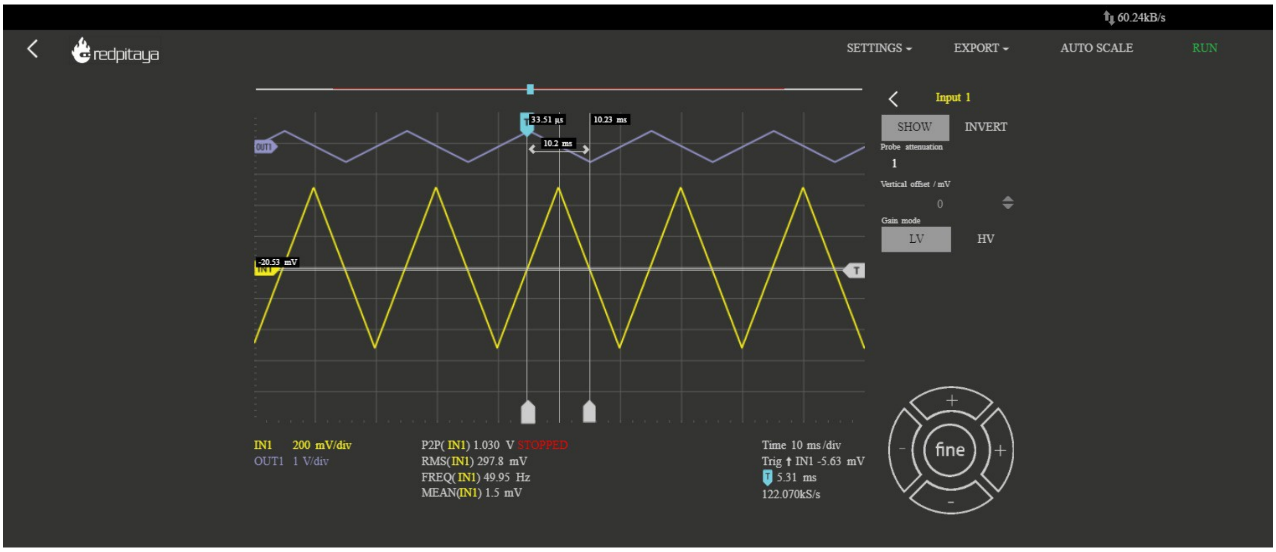
$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = 10^{-6}\,\mathrm{H}$$

c) Welche absolute Messabweichung ΔL erhält man bei einer Toleranz 1% von C und einer Unsicherheit bei der Messung der Resonanzfrequenz von 5%?

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial C}\Delta C\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial f}\Delta f\right| = \left|-\frac{1}{\omega^2 C^2}\Delta C\right| + \left|-\frac{2f}{4\pi^2 f^4 C}\Delta f\right| = 1.1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H}$$

Aufgabe 4

Das Diagramm in Aufgabe 2 wurde als Matlab-Grafik erzeugt. Im Folgenden liefert ein Funktionsgenerator das Dreiecksignal als elektrischen Spannungsverlauf (blaue Kurve). Das Oszilloskop zeigt das gemessene Signal als gelbe Kurve. Einziger Unterschied zum Diagramm in Aufgabe 2 ist, dass der Gleichanteil (Mittelwert) statt 0.5 V hier 0 V beträgt.



a) Geben Sie aus dem Zeitdiagramm zur gelben Kurve an:

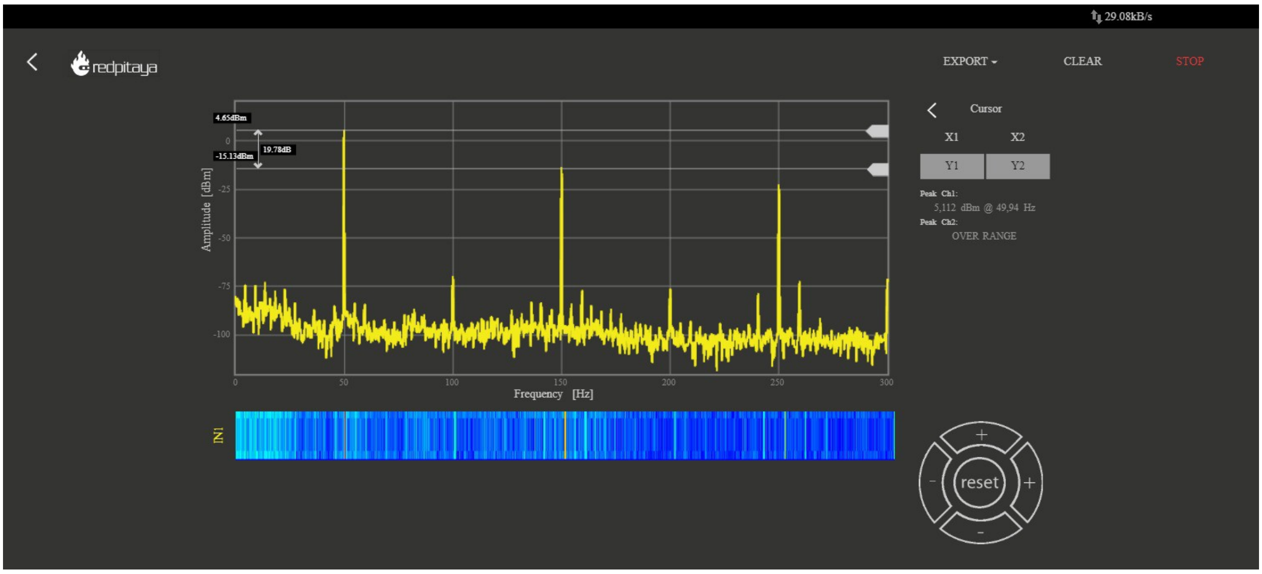
- Frequenz → unten Mitte: 49.95 Hz
- Periodendauer →
  - über Cursor-Positions-Differenz oben Mitte: $\frac{T}{2} = 10.2\text{ ms} \quad\rightarrow\quad T = 20.4\text{ ms}$
  - über Abzählen der Nulldurchgänge oder Maximalwerte im Zeitraster (rechts unten: Time 10 ms/div), z. B. $T = 2 \cdot 10\text{ ms/div} = 20\text{ ms}$.

    Es besteht offensichtlich ein Fehler zwischen der Cursor-Positions-Differenz und dem Abzählen der Nulldurchgänge. Wie lässt sich dieser verringern? (Antwort am Ende)
- Mittelwert → unten Mitte: 1.5 mV
- Amplitude → unten Mitte: P2P 1.030 V oder Ablesen aus Kurvenverlauf.
- Effektivwert → unten Mitte: 297.8 mV, Rechenergebnis $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} u(t)^2\, dt}$, kann nicht aus dem Kurvenverlauf abgelesen werden!
- Zusatzfrage: Was drückt unten rechts die Angabe 122 070 KS/s aus? Antwort am Ende.

b) Wie unterscheidet sich wegen des Mittelwerts 0 V der Effektivwert gegenüber dem im Diagramm bei Aufgabe 2?

Es fehlt in der Formel der Beitrag des Mittelwertes $\overline{U} = 0.5\text{ V}$:

statt $U_{eff} = \sqrt{0.5^2 + \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} (u(t) - 0.5)^2 dt} \quad\rightarrow\quad U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} u(t)^2 dt}$.



Das obige Spektrogramm zeigt die Amplituden der Grundschwingung und der Oberwellen bis 300 Hz. Es entsteht im Spektral-Analysator durch Auswertung der Integrale zur Fourier-Analyse und wird hier mit den Abtastwerten von 29080 kB pro Sekunde (!) durchgeführt – ein ungleich aufwändigerer Rechenvorgang als die bloße Darstellung der Abtastwerte des Spannungsverlaufs im Oszilloskop. Der Vorteil dieser Darstellung gegenüber dem Zeitdiagramm besteht darin, dass hier die Frequenzbestandteile sichtbar gemacht werden. Beide Formen ergänzen sich aber ideal. Z. B. kann ein störender Oberwellenanteil erkannt und durch Filtermaßnahmen verringert werden, so dass er das Netz weniger verseucht.

c) Bestimmen Sie das Amplitudenverhältnis der Oberwelle bei 150 Hz zur Grundwelle. Beachten Sie die Skalierung der vertikalen Achse in dBm. Die Formeln sind

$$\left[\frac{U}{U_{ref}}\right]_{dBm} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U}{U_{ref}}\right)$$, nehmen Sie der Einfachheit halber $U_{ref} = 1\ \mathrm{V}$ an.

$$\left(\frac{U}{U_{ref}}\right) = 10^{\left(\frac{\left[\frac{U}{U_{ref}}\right]_{dBm}}{20}\right)} .$$

Das Amplitudenverhältnis zwischen Grundwelle und Oberwelle bei 150 Hz beträgt gemäß Curser-Differenz 19.8 dB, also

$$\left(\frac{U}{U_{ref}}\right) = 10^{\left(\frac{-[19.8]_{dBm}}{20}\right)} = 0.1023$$

d) Schauen Sie in einem Tabellenbuch nach (z. B. Kories/Schmidt-Walter, Taschenbuch der Elektrotechnik), welches theoretische Verhältnis dort angegeben ist und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Auf S. 286 findet man $u(t) = 0.5\ \mathrm{V} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \left(\cos(\omega\, t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega\, t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega\, t) ...\right)$.

Das Amplitudenverhältnis ist hier theoretisch $\left(\frac{U}{U_{ref}}\right) = \frac{1}{9} = 0.111$. Das Messergebnis aus Punkt d) erscheint also brauchbar.

Im obigen Diagramm sind auch Spektrallinien bei 100 Hz, 200 Hz usw. zu sehen.

e) Bestimmen Sie aus dem untenstehenden Diagramm das Spannungsverhältnis der Oberwelle bei 100 Hz und der Grundwelle.

$$\left(\frac{U}{U_{ref}}\right) = 10^{\left(\frac{-[74.69]_{dBm}}{20}\right)} = 1.84 \cdot 10^{-4}$$, ein sehr kleiner Wert.

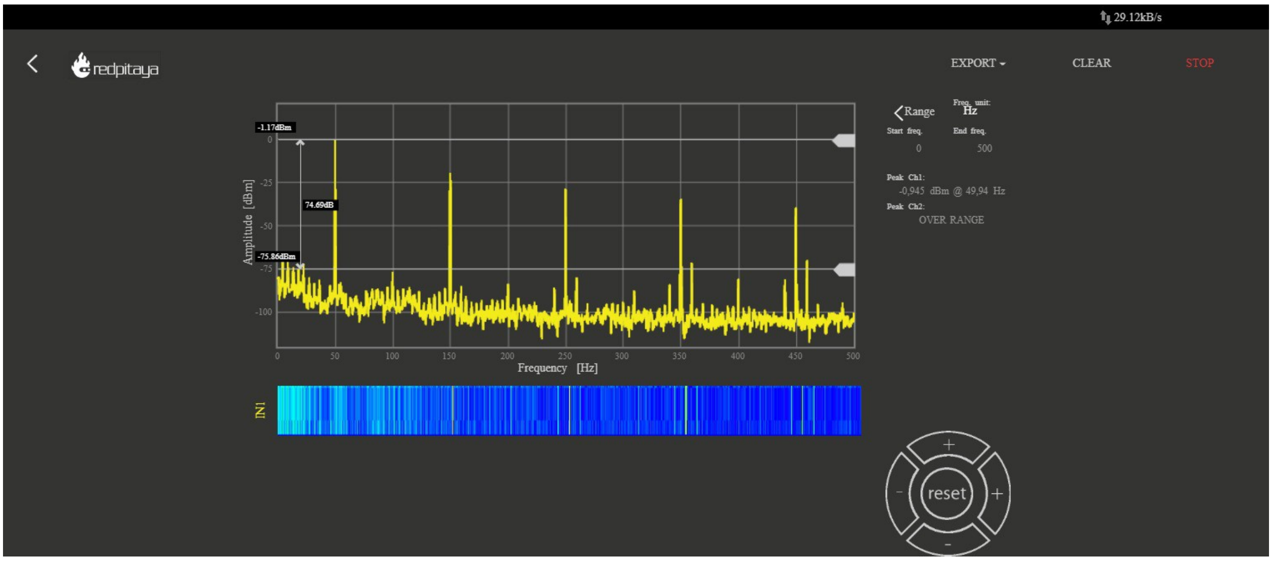
Theoretisch gibt es bei einem reinen Dreieckssignal keine geradzahligen Oberwellen, siehe z. B. wieder Kories/Schmidt-Walter, Taschenbuch der Elektrotechnik.

f) Erklären Sie, warum im physikalischen Dreiecksignal auch kleine geradzahlige Oberwellen auftreten.

Der Funktionsgenerator des Red Pitaya-Stemlab-Moduls erzeugt keine ganz exakt genauen Dreiecksignale. Es sind auch winzige geradzahlige Oberwellenanteile enthalten.

g) Wodurch entsteht der gelbe „Bodensatz“ im Spektrogramm?

Beim Berechnen der Fourier-Koeffizienten ergeben sich zwischen den Frequenzlinien Beitrage aus Rechenungenauigkeiten. Diese sind allerdings sehr klein (logarithmischen Maßstab beachten) und liegen unterhalb von $0.5 \cdot 10^{-5}$. Sie können vernachlässigt und durch den Wert „0“ ersetzt werden (der sich bei logarithmischer Skalierung allerdings auch nicht darstellen lässt).



Zu a):

- Man kann die Cursor-Positionen über mehrere Perioden erstrecken und aus der Differenz den Mittelwert über eine Periode bilden.
- 122 070 kS/s : 122070 Abtastwerte a 14 Bit/s, um die Ergebnisse darzustellen.