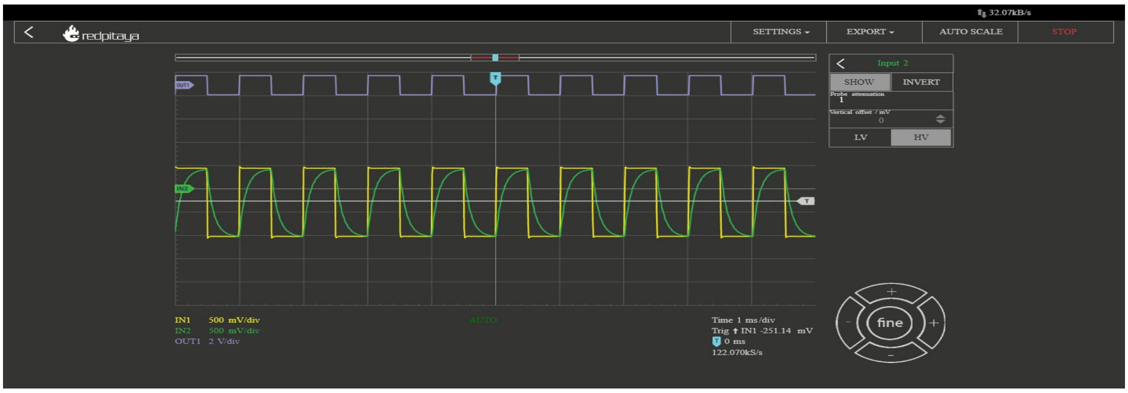
Lösungshinweise zu Übungsblatt 4a

Aufgabe 1

Die Messung des Ausgangssignals einer mit einem Rechtecksignal gespeisten sehr einfachen Zweipolschaltung ergab folgendes Digital-Oszillogramm:



a) Um welche Art Zweipol handelt es sich?

RC-Tiefpass. Aus den Messungen sind die Zeitkonstanten nicht zu entnehmen, die beiden Bauteile sind mit $R=900\ \Omega$ und $C=0.1\ \mu F$ gekennzeichnet. Welche Zeitkonstante T_1 ergibt sich daraus? Vergleichen Sie diese mit den jeweiligen Werten aus den Messergebnissen.

b) Welche Taktfrequenz T hat das Rechtecksignal?

Aus dem Oszillogramm entnimmt man rechts unten die Angabe $\text{Time } 100\ \mu s/dv$. Die Periodendauer des Rechtecksignals ist also $T=1\ ms$.

c) Skizzieren Sie die Schaltung. → Selber machen.

Im Zoom sieht man diesen Ausschnitt:

d) Welchem Funktionsausdruck entspricht der Verlauf der Ausgangsspannung u(t) (grün) für den Zeitabschnitt $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_0(t)$ (gelb)?

$$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad , \quad R \cdot C = T_1$$

e) Bestimmen Sie die Zeitkonstante T_1 . Tipp: Entnehmen Sie dem Oszillogramm den asymptotischen Endwert $u_\infty = u(t \to \infty) = U_0$, der rechte vertikale Cursor ist dort platziert, wo $u(t_1) = 0.63 \cdot u_\infty = U_0$ erreicht hat.

$$U_0 = 0.9985 \approx 1\,V$$

$$u(t_1) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_1}{T_1}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = U_0 \cdot 0.63\ V$$

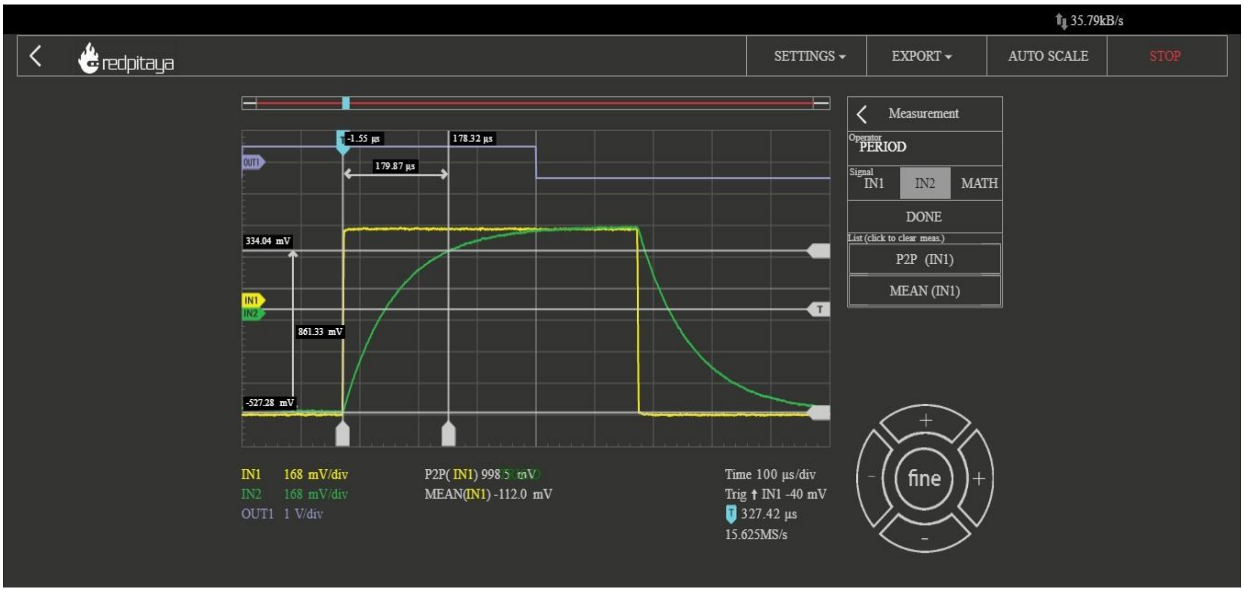
$$T_1 = 90.81\ \mu s$$

f) Vergleichen Sie das Ergebnis aus e) für T_1 mit den aus dem folgenden Diagramm entnehmbaren Messwerten, $u(t_2) = 0.86 \cdot u_\infty$.

$$u(t_2) = 0.86 \cdot U_0 = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_2}{T_1}}\right) \quad \to \quad 0.14 = e^{-\frac{t_2}{T_1}} \quad \to \quad \log(0.14) = -\frac{t_2}{T_1}$$

$$T_1 = -\frac{t_2}{\log}(0.14) = -\frac{178.87 \cdot 10^{-6}}{\log(0.14)} = 90.97\ \mu s$$

→ gute Übereinstimmung mit Ergebnis aus Punkt e)



Nun wird die Messung mit einer Sinusspannung wiederholt (es liegt kein Oszillogramm vor).

g) Geben Sie allgemein die komplexe Spannung $U(j\omega) = f(U_0(j\omega))$ an.

$$\frac{U}{U_0}=\frac{1}{1+j\omega T_1}$$

h) Bestimmen Sie Betrag $|U(j\omega)|$ und Phasenwinkel $\phi(j\omega)$.

$$\left|\frac{U}{U_0}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}} \quad , \quad \phi=-\mathrm{arctg}(\omega\cdot T_1)$$

i) Wie ist die Grenzfrequenz f_g definiert?

$$\left|\frac{U(j\omega_g)}{U_0(j\omega_g)}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f_g T_1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; 2\pi f_g T_1=1 \;\rightarrow\; f_g=\frac{1}{2\pi T_1}$$

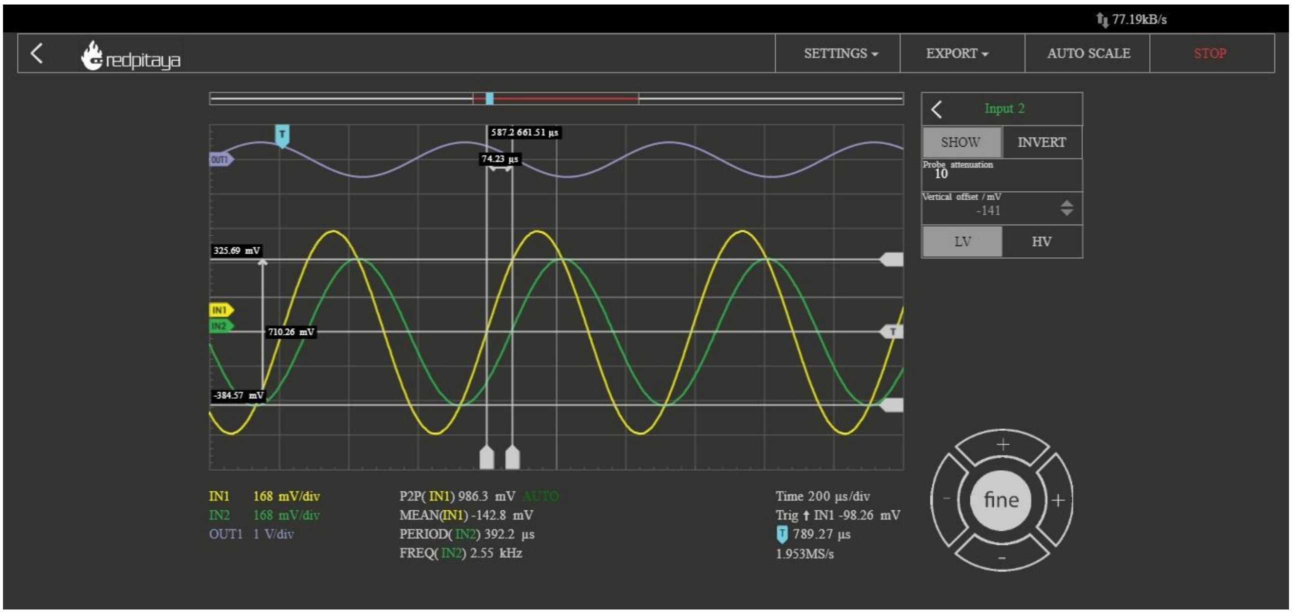
Das gilt allgemein für beliebige Schaltungen.

Der Phasenwinkel beträgt hier

$$\phi(f_g)=-\mathrm{arctg}(\omega_g\cdot T_1)=-\mathrm{arctg}(1)=-45° \quad .$$

Dies trifft **nur** für Tiefpässe **erster** Ordnung zu!

Die Frequenz an der Schaltung wird anschließend solange verändert, bis man das folgendes Mess-Diagramm erhält, die Frequenz ist nun $f_g=1700\ \mathrm{Hz}$ bei – 3 dB des Maximalbetrags, entspricht einer Absenkung des Betrags um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.71$



j) Bestätigen Sie hieraus die Ergebnisse zu Punkt i), alle notwendigen Angaben sind im Diagramm enthalten.

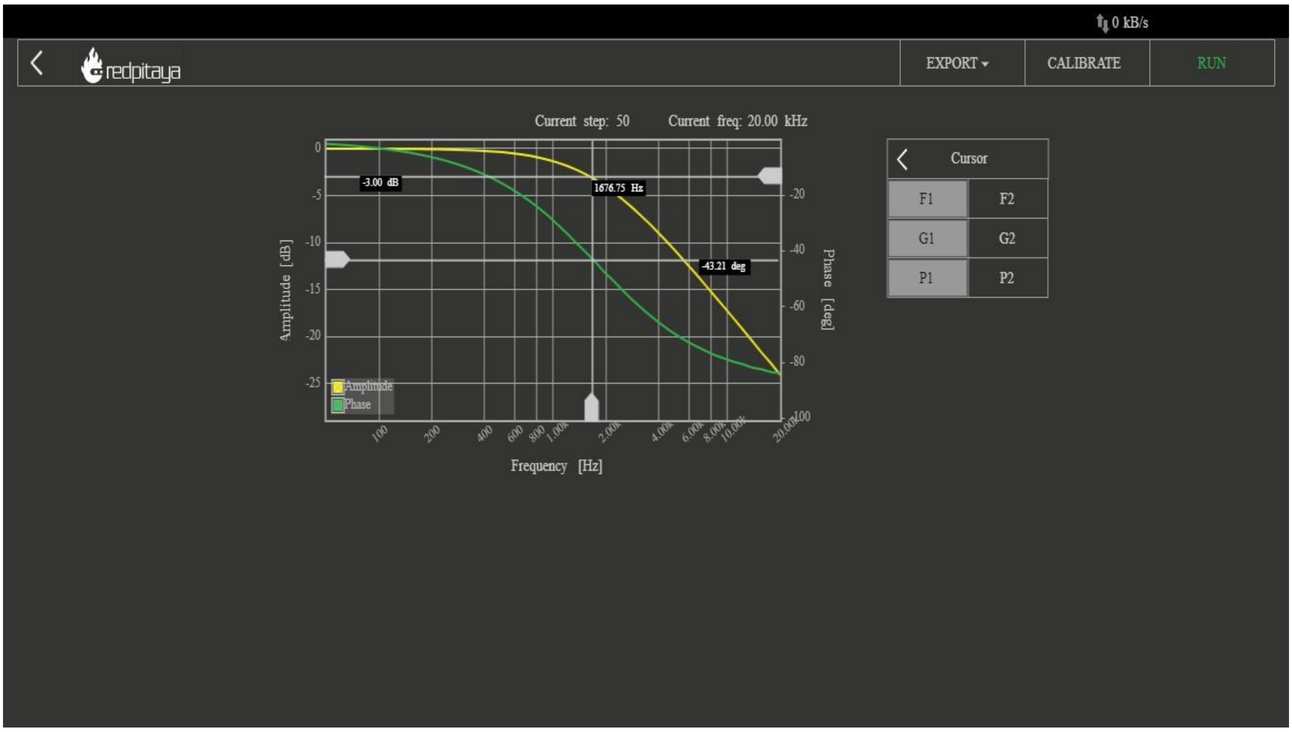
Die Ausgangsspannung (grün) ist bei f_g auf $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\hat{u}_0$ abgesunken, die Periodendauer beträgt nun

$$T\approx 2.9\cdot 200\cdot 10^{-6}=580\ \mu s \;\rightarrow\; f_g=\frac{1}{T}\approx 1724\ \mathrm{Hz}$$

Die Zeitkonstante ist damit $T_1 = \frac{1}{2\pi f_g} \approx 92.31\ \mu s$

→ noch brauchbare Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus den Punkte e) und f)

Für die Schaltung wurde zusätzlich folgendes grobe Bodediagramm gemessen:



k) Lassen sich daraus die bisherigen Ergebnisse zur Grenzfrequenz f_g im Großen bestätigen? Begründungen?

Die Messkurven zeigen hier den Betrags- und Phasenverlauf aus Punkt i) über der Frequenz. Die Betragskurve (gelb) ist bei $f_g \approx 1676.75\ \text{Hz}$ auf den Wert

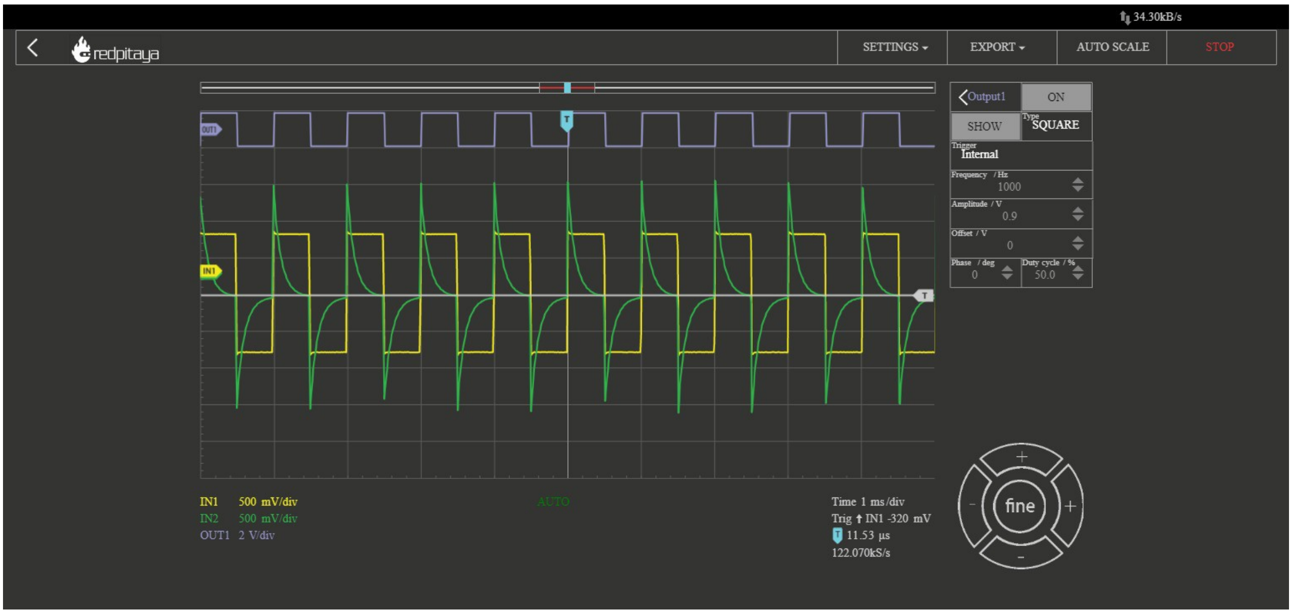
$|U(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ abgesunken (der -3 dB-Wert, warum?). Die Zeitkonstante beträgt

$$T_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g} \approx 87.5\ \mu s$$

Der Phasenwinkel ist $-45.2°$

Aufgabe 2

Die Struktur der einfachen Schaltung ist im Folgenden die gleiche, nach einer kleinen Änderung erhält man aber nun folgende Digital-Oszillogramme:

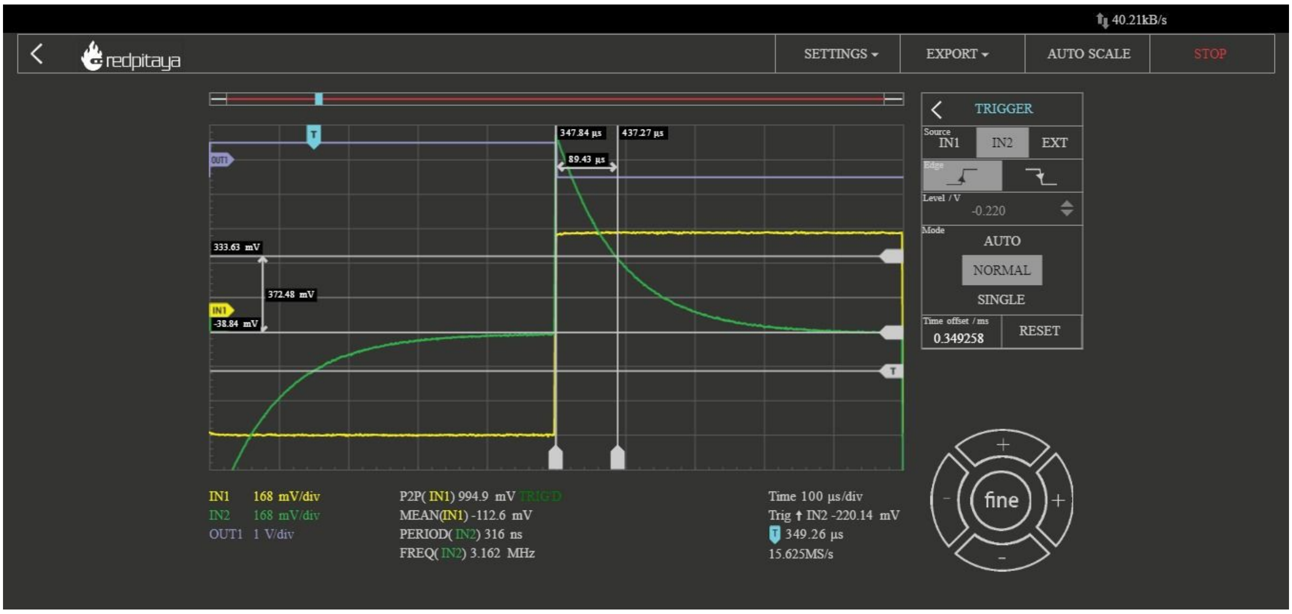


a) Um welche Art Zweipol handelt es sich?

RC-Hochpass, dieser differenziert das Rechtecksignal.

b) Welche Taktfrequenz T hat das Rechtecksignal?

$T = 1$ ms   Skizzieren Sie die Schaltung. → selber machen



c) Welchem Funktionsausdruck entspricht der Verlauf der Ausgangsspannung $u(t)$ (grün) abhängig von der Eingangsspannung $u_0(t)$ (gelb)?

$$\frac{U}{U_0} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega T_1}{1 + j\omega T1}$$

d) Bestimmen Sie die Zeitkonstante T_1 . Tipp: Entnehmen Sie dem Diagramm den asymptotischen Endwert $u_\infty = u(t \to \infty)$, der rechte vertikale Cursor ist dort platziert, wo $u(t_1) = 0.37 \cdot u_\infty$ erreicht hat.

Nun wird die Messung mit einer Sinusspannung wiederholt.

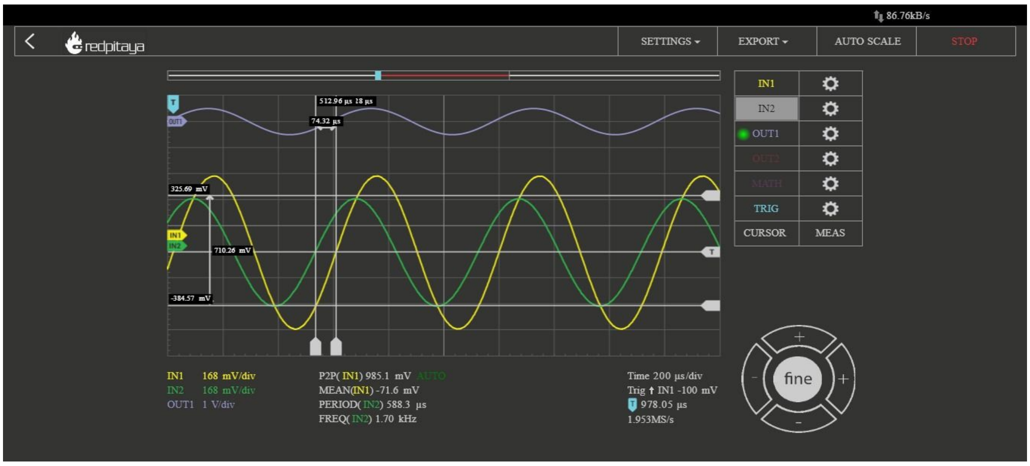
e) Geben Sie allgemein die komplexe Spannung $U(j\omega) = f(U_0(j\omega))$ an.

$$|U| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T_1)^2}}$$

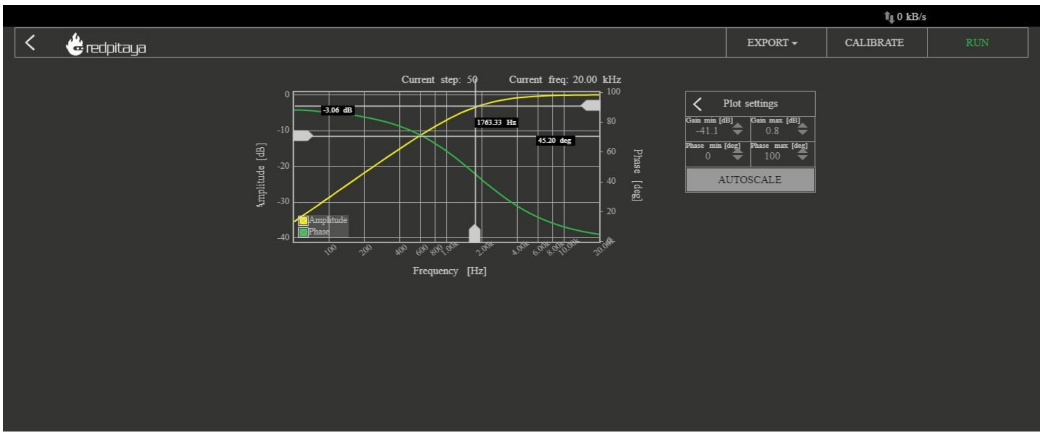
f) Bestimmen Sie Betrag $|U(j\omega)|$ und Phasenwinkel $\phi(j\omega)$.

g) Wie ist die Grenzfrequenz f_g definiert?

Die Frequenz an der Schaltung wird verändert, bis man das folgende Mess-Diagramm erhält:

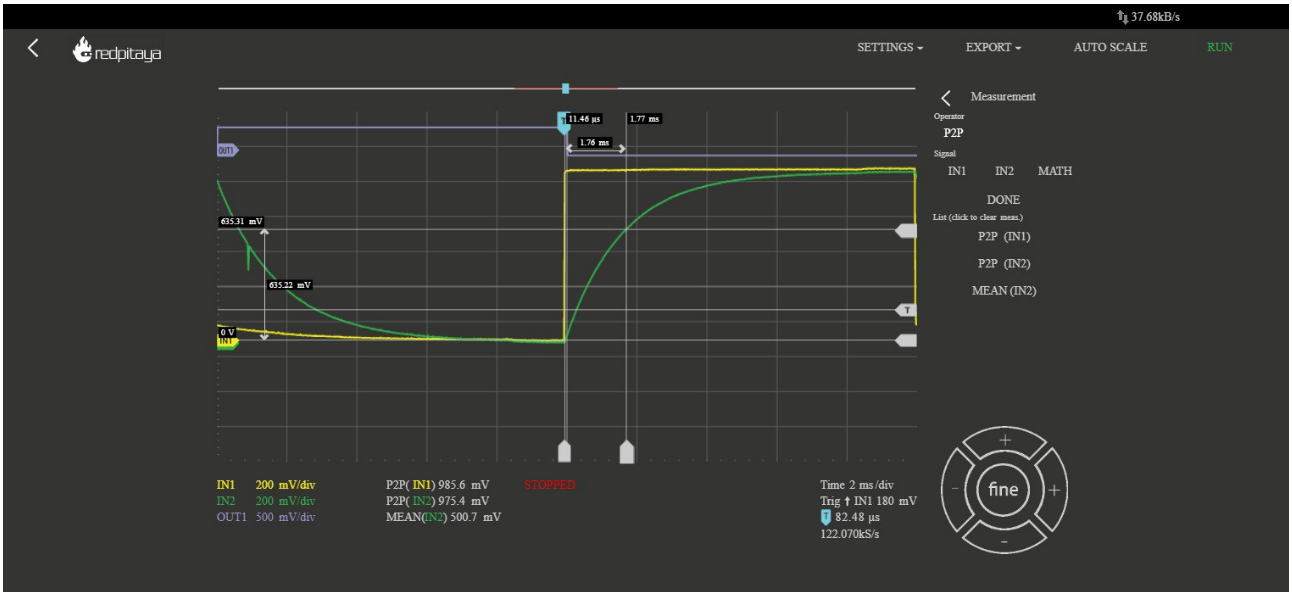


Für die Schaltung wurde außerdem folgendes grobe Bodediagramm gemessen:

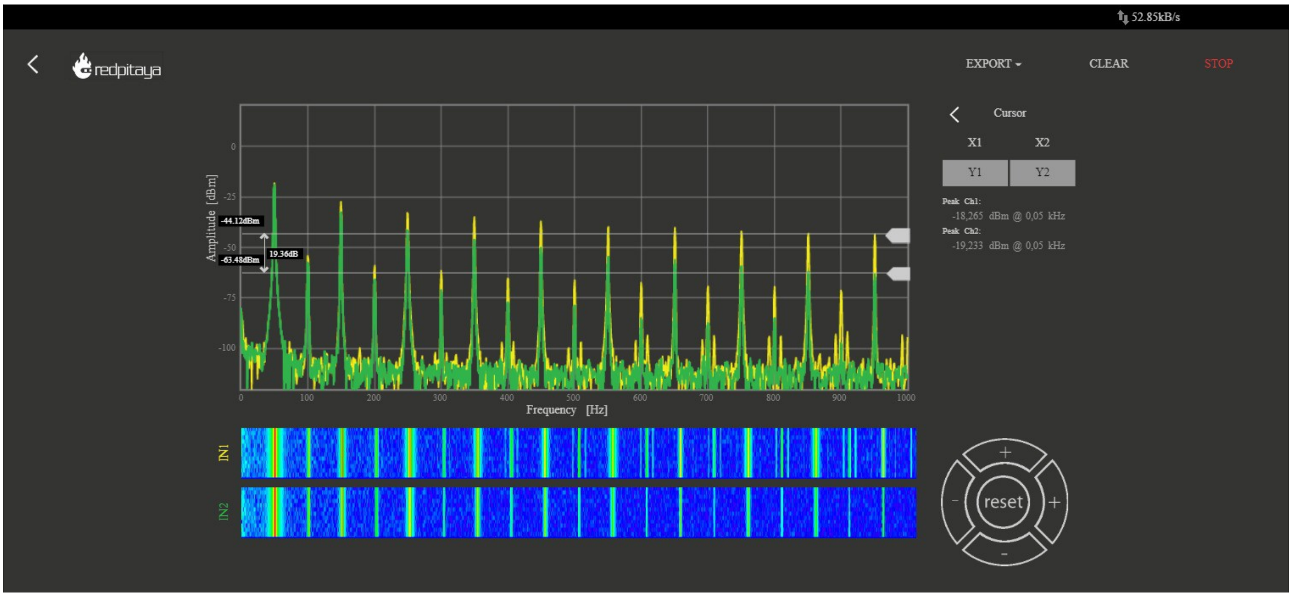


h) Lassen sich daraus die bisherigen Ergebnisse zur Grenzfrequenz f_g im Großen bestätigen? Begründungen?

In einem weiteren Schritt wird untersucht, welchen Einfluss ein Tiefpassfilter erster Ordnung auf die Dämpfung der Oberwellen im Ausgangssignal bei speisendem Eingangs-Rechecksignal hat. Das Eingangssignal weist hier die Amplitude $U_{ein}=1$ Volt und den Mittelwert $\overline{U}_{ein}=0.5$ V auf. Die Spannung ist also rein positiv. Das Ausgangssignal zeigt wieder die bekannte „Ladekurve“.



Im Amplituden-Spektrogramm sieht man die Frequenzanteile des Eingangssignals (gelb) und die des Ausgangssignals (grün). Dass hier noch deutliche geradzahlige Oberwellenanteile enthalten sind, liegt am etwas „unsauberen“ Verlauf des Rechteck-Eingangssignals und ist in diesem Zusammenhang nicht weiter interessant.



i) Was lässt sich daraus für den Einfluss des Tiefpassfilters schließen? Betrachten Sie dazu die Differenzen zwischen den Spektrallinien von Ausgangs- und Eingangssignal.

Die Amplituden der Frequenzanteile werden gemäß des Betragsverlaufs

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\, R\cdot C)^2}}$$

gedämpft. Versuchen Sie, Zahlenwerte abzulesen.